Astronomía Sigma Octante Desde 1977	**Astronomía Sigma Octante** Casilla 1491 - Cochabamba – Bolivia http://www.astronomia.org.bo	**Artículo N° 341** 2024-9-11

EN EL "DÍA SIN SOMBRA", EL CENTRO DEL DISCO SOLAR NO CULMINA EXACTAMENTE EN EL CENIT

Cálculo para Cochabamba – Bolivia, primavera de 2024

Por: Moisés Montero R.O.
Fundación Astronomía Sigma Octante

Propósito:

El propósito de este documento es doble: En primer lugar, dejar claro que el Sol (su centro) no se halla necesariamente en el cenit al medio día del "día sin sombra". En segundo lugar, se tiene como objetivo mostrar que se pueden realizar cálculos bastante precisos para fenómenos locales a partir de las tablas de posición del Sol.

------------------------- ooo -------------------------

El día sin sombra se produce cuando al culminar el Sol en el Cenit, no se proyecta sombra lateral alguna sobre los objetos en tierra.

Esto sucede cuando la declinación del Sol iguala a la latitud del lugar, por lo que los rayos solares inciden verticalmente en la superficie de la Tierra a momento de su culminación (medio día).

Sin embargo, demostraremos para un lugar y fecha en particular, que el centro del disco Solar no necesariamente culmina a una altura de 90° (Cenit) en el "día sin sombra".

Para demostrar aquello, realizaremos el cálculo de la fecha y hora en la cual la declinación del Sol alcanza un valor que iguala exactamente a la latitud de la ciudad de Cochabamba - Bolivia, y veremos que esa hora no coincide con la hora de la culminación (medio día).

Tomamos la latitud de Cochabamba igual a -17° 23' 22.2''.

De acuerdo a la tabla de efemérides del Anexo 1, es evidente que la declinación del Sol iguala a la latitud de Cochabamba en algún momento entre el 10 y el 11 de noviembre; Entonces:

Declinación aparente del Sol= Latitud de Cochabamba= -17° 23' 22.2''

Calculamos el momento (hora) entre el 10 y 11 de noviembre en el cual la declinación del Sol iguala a la latitud de Cochabamba:

Aplicamos el método de interpolación inversa sobre la tabla del Anexo 1:

NOVIEMBRE	DECLINACION APARENTE ° ' "	DECLINACION APARENTE "	DIFERENCIAS 1st	2nd
9	-16 56 03.1	-60963.10000		
			-1015.10000	
10	-17 12 58.2	-61978.20000		17.80000
			-997.30000	
11	-17 29 35.5	-62975.50000		18.20000
			-979.10000	
12	-17 45 54.6	-63954.60000		

Nota: En el Anexo 2 se muestra la teoría para interpolación de tablas

$$P_1 = (f_p - f_0) / \delta_{1/2} = -17° 23' 22.2'' - (-17° 12' 58.2'')/ -997.3 = 0.62569$$

Realizando una segunda iteración con la fórmula $P = P_1 - B_2(\delta_0^2 + \delta_1^2)/\delta_{1/2}$ el valor de B_2 no cambia, por lo que trabajamos con P=0.62569

Hallamos el tiempo contando desde las 0h del 10 de noviembre y tomando el intervalo de interpolación h = 1 día:

$$t = t_0 + P * h = 0 + 0.62569 \times 1 = 0.62569 \text{ días}$$

Convertimos “t” a segundos, considerando que para el año 2024 se cumple que 1 día sideral= $23^h56^m4.009053^s$ = 86164.009 s

$$t = 0.62569 \times 86164.009 = 53911.9588 \text{ s}$$

Este tiempo “t” se halla en formato TT (Terrestrial Time); convertimos a Tiempo Universal:

UT = TT - ΔT donde ΔT= 69.0126 s de acuerdo a las efemérides publicadas en el almanaque náutico del 2024

UT = 53911.9588 - 69.0126 = 53842.9462 s = $14^h57^m23^s$

Ahora ajustamos con el huso horario para Cochabamba (-4h); Entonces:

El Sol alcanzará una declinación igual a la latitud de Cochabamba a las $10^h57^m23^s$ (Tiempo Local) el 10 de noviembre de 2024.

Nota: Para propósitos de este cálculo se considerará despreciable la diferencia entre UT y UTC.

Ahora bien, el 10 de noviembre el Sol culmina a las $12^h08^m40^s$ (fuente: Cartes du Ciel) y no así a las $10^h57^m23^s$, por lo que el centro del disco Solar se habrá desplazado un poco a lo largo de la eclíptica entre las $10^h57^m23^s$ y las $12^h08^m40^s$ (el desplazamiento es de aproximadamente 1 minuto de arco)

Como sabemos, el diámetro aparente del Sol es de aproximadamente 32’, por lo que en esencia el disco solar se hallará en el cenit en el momento de la culminación, aunque su centro no se halla exactamente culminando a 90° de altura (sino un minuto de arco desplazado).

Esto se debe a que la declinación del Sol tiene un valor a las $10^h57^m23^s$ (momento en el cual su declinación iguala a nuestra latitud) y otro valor distinto a las $12^h08^m40^s$ (momento de su culminación), debido a su constante movimiento aparente sobre la eclíptica.

Conclusiones:

1. **Se demuestra que el centro del disco Solar no necesariamente culmina a una altura de 90° (Cenit) en el “día sin sombra”.**

2. **Se muestra la utilidad de las tablas de posición del Sol y un método de interpolación para los valores publicados en ellas.**

Anexo 1

C18 SUN, 2024

FOR 0ʰ TERRESTRIAL TIME

Date		Julian Date	Geometric Ecliptic Coords. Mn Equinox & Ecliptic of Date		Apparent R. A.	Apparent Declination
			Longitude	Latitude		
		246	° ′ ″	″	h m s	° ′ ″
Oct.	1	0584.5	188 18 48.04	+0.33	12 30 31.21	− 3 17 40.0
	2	0585.5	189 17 49.63	+0.20	12 34 08.63	− 3 40 54.8
	3	0586.5	190 16 53.28	+0.07	12 37 46.36	− 4 04 07.1
	4	0587.5	191 15 58.96	−0.06	12 41 24.43	− 4 27 16.5
	5	0588.5	192 15 06.61	−0.18	12 45 02.85	− 4 50 22.6
	6	0589.5	193 14 16.20	−0.28	12 48 41.64	− 5 13 25.2
	7	0590.5	194 13 27.68	−0.37	12 52 20.82	− 5 36 23.7
	8	0591.5	195 12 41.02	−0.43	12 56 00.40	− 5 59 17.8
	9	0592.5	196 11 56.17	−0.46	12 59 40.41	− 6 22 07.2
	10	0593.5	197 11 13.10	−0.47	13 03 20.85	− 6 44 51.4
	11	0594.5	198 10 31.80	−0.44	13 07 01.75	− 7 07 30.1
	12	0595.5	199 09 52.25	−0.39	13 10 43.12	− 7 30 02.8
	13	0596.5	200 09 14.44	−0.30	13 14 24.98	− 7 52 29.2
	14	0597.5	201 08 38.39	−0.19	13 18 07.34	− 8 14 48.9
	15	0598.5	202 08 04.14	−0.06	13 21 50.24	− 8 37 01.6
	16	0599.5	203 07 31.72	+0.08	13 25 33.68	− 8 59 06.9
	17	0600.5	204 07 01.21	+0.22	13 29 17.69	− 9 21 04.4
	18	0601.5	205 06 32.68	+0.36	13 33 02.30	− 9 42 53.9
	19	0602.5	206 06 06.22	+0.48	13 36 47.54	−10 04 35.0
	20	0603.5	207 05 41.90	+0.58	13 40 33.41	−10 26 07.4
	21	0604.5	208 05 19.77	+0.65	13 44 19.95	−10 47 30.7
	22	0605.5	209 04 59.88	+0.69	13 48 07.17	−11 08 44.5
	23	0606.5	210 04 42.26	+0.69	13 51 55.08	−11 29 48.4
	24	0607.5	211 04 26.90	+0.67	13 55 43.70	−11 50 42.0
	25	0608.5	212 04 13.81	+0.61	13 59 33.04	−12 11 24.9
	26	0609.5	213 04 02.96	+0.53	14 03 23.11	−12 31 56.8
	27	0610.5	214 03 54.32	+0.43	14 07 13.93	−12 52 17.1
	28	0611.5	215 03 47.86	+0.32	14 11 05.52	−13 12 25.5
	29	0612.5	216 03 43.53	+0.19	14 14 57.87	−13 32 21.6
	30	0613.5	217 03 41.28	+0.06	14 18 51.00	−13 52 04.9
	31	0614.5	218 03 41.07	−0.07	14 22 44.93	−14 11 35.0
Nov.	1	0615.5	219 03 42.83	−0.19	14 26 39.65	−14 30 51.5
	2	0616.5	220 03 46.49	−0.30	14 30 35.18	−14 49 53.9
	3	0617.5	221 03 52.00	−0.39	14 34 31.53	−15 08 42.0
	4	0618.5	222 03 59.29	−0.46	14 38 28.69	−15 27 15.1
	5	0619.5	223 04 08.29	−0.51	14 42 26.67	−15 45 33.0
	6	0620.5	224 04 18.94	−0.52	14 46 25.47	−16 03 35.1
	7	0621.5	225 04 31.17	−0.51	14 50 25.09	−16 21 21.1
	8	0622.5	226 04 44.93	−0.46	14 54 25.53	−16 38 50.6
	9	0623.5	227 05 00.17	−0.39	14 58 26.80	−16 56 03.1
	10	0624.5	228 05 16.85	−0.29	15 02 28.90	−17 12 58.2
	11	0625.5	229 05 34.95	−0.17	15 06 31.81	−17 29 35.5
	12	0626.5	230 05 54.46	−0.04	15 10 35.56	−17 45 54.6
	13	0627.5	231 06 15.38	+0.10	15 14 40.13	−18 01 55.2
	14	0628.5	232 06 37.76	+0.24	15 18 45.55	−18 17 36.9
	15	0629.5	233 07 01.62	+0.36	15 22 51.80	
	16	0630.5	234 07 27.03	+0.46		

Tabla de efemérides del Sol para el 2024

Anexo 2

K14

INTERPOLATION METHODS

Introduction and notation

The interpolation methods described in this section, together with the accompanying tables, are usually sufficient to interpolate to full precision the ephemerides in this volume. Additional notes, formulae and tables are given in the booklets *Interpolation and Allied Tables* and *Subtabulation* and in many textbooks on numerical analysis.

f_p denotes the value of the function $f(t)$ at the time $t = t_0 + ph$, where h is the interval of tabulation, t_0 is a tabular argument, and $p = (t - t_0)/h$ is known as the interpolating factor. The notation for the differences of the tabular values is shown in the following table; it is derived from the use of the central-difference operator δ, which is defined by:

$$\delta f_p = f_{p+1/2} - f_{p-1/2}$$

The symbol for the function is usually omitted in the notation for the differences. Tables are given for use with Bessel's interpolation formula for p in the range 0 to +1. The differences may be expressed in terms of function values for convenience in the use of programmable calculators or computers.

Arg.	Function	Differences 1st	2nd	3rd	4th	Differences in terms of Function Values
t_{-2}	f_{-2}		δ^2_{-2}			$\delta_{1/2} = f_1 - f_0$
		$\delta_{-3/2}$		$\delta^3_{-3/2}$		$\delta^2_0 = \delta_{1/2} - \delta_{-1/2}$
t_{-1}	f_{-1}		δ^2_{-1}		δ^4_{-1}	$= f_1 - 2f_0 + f_{-1}$
		$\delta_{-1/2}$		$\delta^3_{-1/2}$		$\delta^2_0 + \delta^2_1 = f_2 - f_1 - f_0 + f_{-1}$
t_0	f_0		δ^2_0		δ^4_0	$\delta^3_{1/2} = \delta^2_1 - \delta^2_0$
		$\delta_{1/2}$		$\delta^3_{1/2}$		$= f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}$
t_{+1}	f_{+1}		δ^2_1		δ^4_1	$\delta^4_0 = \delta^3_{1/2} - \delta^3_{-1/2}$
		$\delta_{3/2}$		$\delta^3_{3/2}$		$= f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}$
t_{+2}	f_{+2}		δ^2_2			$\delta^4_0 + \delta^4_1 = f_3 - 3f_2 + 2f_1 + 2f_0 - 3f_{-1} + f_{-2}$

$$p \equiv \text{the interpolating factor} = (t - t_0)/(t_1 - t_0) = (t - t_0)/h$$

Bessel's interpolation formula

In this notation, Bessel's interpolation formula is:

$$f_p = f_0 + p\,\delta_{1/2} + B_2\,(\delta^2_0 + \delta^2_1) + B_3\,\delta^3_{1/2} + B_4\,(\delta^4_0 + \delta^4_1) + \cdots$$

where $B_2 = p\,(p-1)/4 \qquad B_3 = p\,(p-1)\,(p-\tfrac{1}{2})/6$

$$B_4 = (p+1)\,p\,(p-1)\,(p-2)/48$$

The maximum contribution to the truncation error of f_p, for $0 < p < 1$, from neglecting each order of difference is less than 0·5 in the unit of the end figure of the tabular function if

$$\delta^2 < 4 \qquad \delta^3 < 60 \qquad \delta^4 < 20 \qquad \delta^5 < 500.$$

The critical table of B_2 opposite provides a rapid means of interpolating when δ^2 is less than 500 and higher-order differences are negligible or when full precision is not required. The interpolating factor p should be rounded to 4 decimals, and the required value of B_2 is then the tabular value opposite the interval in which p lies, or it is the value above and to the right of p if p exactly equals a tabular argument. B_2 is always negative. The effects of the third and fourth differences can be estimated from the values of B_3 and B_4, given in the last column.

INTERPOLATION METHODS

K15

Inverse interpolation

Inverse interpolation to derive the interpolating factor p, and hence the time, for which the function takes a specified value f_p is carried out by successive approximations. The first estimate p_1 is obtained from:

$$p_1 = (f_p - f_0)/\delta_{1/2}$$

This value of p is used to obtain an estimate of B_2, from the critical table or otherwise, and hence an improved estimate of p from:

$$p = p_1 - B_2\,(\delta_0^2 + \delta_1^2)/\delta_{1/2}$$

This last step is repeated until there is no further change in B_2 or p; the effects of higher-order differences may be taken into account in this step.

CRITICAL TABLE FOR BESSEL'S INTERPOLATION FORMULA COEFFICIENTS

p	B_2 −	p	B_2 −	p	B_2 −	p	B_2 −	p	B_2 −
0·0000	·000	0·1101	·025	0·2719	·050	0·7280	·049	0·8898	·024
0·0020	·001	0·1152	·026	0·2809	·051	0·7366	·048	0·8949	·023
0·0060	·002	0·1205	·027	0·2902	·052	0·7449	·047	0·9000	·022
0·0101	·003	0·1258	·028	0·3000	·053	0·7529	·046	0·9049	·021
0·0142	·004	0·1312	·029	0·3102	·054	0·7607	·045	0·9098	·020
0·0183	·005	0·1366	·030	0·3211	·055	0·7683	·044	0·9147	·019
0·0225	·006	0·1422	·031	0·3326	·056	0·7756	·043	0·9195	·018
0·0267	·007	0·1478	·032	0·3450	·057	0·7828	·042	0·9242	·017
0·0309	·008	0·1535	·033	0·3585	·058	0·7898	·041	0·9289	·016
0·0352	·009	0·1594	·034	0·3735	·059	0·7966	·040	0·9335	·015
0·0395	·010	0·1653	·035	0·3904	·060	0·8033	·039	0·9381	·014
0·0439	·011	0·1713	·036	0·4105	·061	0·8098	·038	0·9427	·013
0·0483	·012	0·1775	·037	0·4367	·062	0·8162	·037	0·9472	·012
0·0527	·013	0·1837	·038	0·5632	·061	0·8224	·036	0·9516	·011
0·0572	·014	0·1901	·039	0·5894	·060	0·8286	·035	0·9560	·010
0·0618	·015	0·1966	·040	0·6095	·059	0·8346	·034	0·9604	·009
0·0664	·016	0·2033	·041	0·6264	·058	0·8405	·033	0·9647	·008
0·0710	·017	0·2101	·042	0·6414	·057	0·8464	·032	0·9690	·007
0·0757	·018	0·2171	·043	0·6549	·056	0·8521	·031	0·9732	·006
0·0804	·019	0·2243	·044	0·6673	·055	0·8577	·030	0·9774	·005
0·0852	·020	0·2316	·045	0·6788	·054	0·8633	·029	0·9816	·004
0·0901	·021	0·2392	·046	0·6897	·053	0·8687	·028	0·9857	·003
0·0950	·022	0·2470	·047	0·7000	·052	0·8741	·027	0·9898	·002
0·1000	·023	0·2550	·048	0·7097	·051	0·8794	·026	0·9939	·001
0·1050	·024	0·2633	·049	0·7190	·050	0·8847	·025	0·9979	·000
0·1101		0·2719		0·7280		0·8898		1·0000	

p	B_3
0·0	0·000
0·1	+0·006
0·2	+0·008
0·3	+0·007
0·4	+0·004
0·5	0·000
0·6	−0·004
0·7	−0·007
0·8	−0·008
0·9	−0·006
1·0	0·000

p	B_4
0·0	0·000
0·1	+0·004
0·2	+0·007
0·3	+0·010
0·4	+0·011
0·5	+0·012
0·6	+0·011
0·7	+0·010
0·8	+0·007
0·9	+0·004
1·0	0·000

In critical cases ascend. B_2 is always negative.

Polynomial representations

It is sometimes convenient to construct a simple polynomial representation of the form

$$f_p = a_0 + a_1\,p + a_2\,p^2 + a_3\,p^3 + a_4\,p^4 + \cdots$$

which may be evaluated in the nested form

$$f_p = (((a_4\,p + a_3)\,p + a_2)\,p + a_1)\,p + a_0$$

Expressions for the coefficients a_0, a_1, … may be obtained from Stirling's interpolation formula, neglecting fifth-order differences:

$$a_4 = \delta_0^4/24 \qquad a_2 = \delta_0^2/2 - a_4 \qquad a_0 = f_0$$
$$a_3 = (\delta_{1/2}^3 + \delta_{-1/2}^3)/12 \qquad a_1 = (\delta_{1/2} + \delta_{-1/2})/2 - a_3$$

This is suitable for use in the range $-\frac{1}{2} \le p \le +\frac{1}{2}$, and it may be adequate in the range $-2 \le p \le 2$, but it should not normally be used outside this range. Techniques are available in the literature for obtaining polynomial representations which give smaller errors over similar or larger intervals. The coefficients may be expressed in terms of function values rather than differences.

Métodos de interpolación muy útiles para las tablas de posición del Sol

Fundación
Astronomía Sigma Octante

Artículo publicado el 9 de noviembre, primavera de 2024 Por: Moisés Montero Reyes Ortiz.